CONCOURS SPECIAL T'

1982

ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 2 heures

1° Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'espace vectoriel des polynômes complexes nuls ou de degré au plus n, f_n l'endomorphisme de E_n défini par :

$$z \neq -1 \Rightarrow f_n(P)(z) = (1+z)^n P\left(\frac{1-z}{1+z}\right).$$

Expliquer brièvement pourquoi f_n est bien défini et calculer $f_n \circ f_n$.

2° Calculer polynôme caractéristique et valeurs propres de f_n pour $n \leqslant 3$.

3° Calculer $f_3(P)$ pour P élément de $\{X+1,\ X^2+1,\ X+\sqrt{2}+1,\ X-\sqrt{2}+1\}$.

4° Déterminer les sous-espaces propres de f_3 à l'aide des polynômes ci-dessus; f_3 est-il diagonalisable?

5° Déterminer une base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de E_n par rapport à laquelle la matrice de f_n soit de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & & & a^n \\ & & \iddots & \\ & a^2 & & \\ a & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

6° Désormais $n = 5$. Soit F le sous-espace de E_5 dont une base est $B = (X^5+1,\ X^4+X,\ X^3+X^2)$. On note g l'application linéaire de F sur l'image $f(F) = G$ définie par $g(P) = f(P)$. Montrer que $B' = (2X^4,\ 2X^2,\ 2)$ est une base de G.

7° Calculer la matrice M de g par rapport aux bases B et B', ainsi que son inverse M^{-1}.

8° Déterminer une matrice-ligne L et une matrice-colonne C telles que, si l'on note :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on ait $M = R + CL$.

9° Soit N une matrice complexe satisfaisant à l'égalité $RN^{-1}R = N$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, une matrice-ligne V et une matrice-colonne U telles que l'on ait $N = \varepsilon R + UV$.

10° Étudier la réciproque.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail